20.10.

Kombinatorické počítání

TVRZENÍ: (o počtu funkcí)

Nechť M,N jsou konečné množiny, m=|M|, n=|N|. Potom počet funkcí f:N->M je roven mn

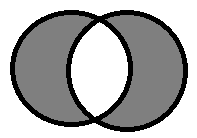
DŮKAZ:

Každá funkce f:N->M je jednoznačně (f(x1), f(x2)..., f(xn)) ∈Mn

Dále |Mn|=mn

Množinové značení:

X množina : 2X množina všech podmnožin X (také se používá #P(x))

X,Y množiny, jejich symetrická diference je množina X #trojuhelnicek Y := (X\Y) ∩ (Y\X)

TVRZENÍ: (o počtu podmnožin)

Nechť N je konečná množina velikosti n, potom N má přesně 2n podmnožin tj. |2n|=2n

DŮKAZ:

Najdeme bijekci mezi 2n a množinou funkcí f:N->{0,1}

Počet takových funkcí je 2n

Konrétně pro A≤N: N-> {0,1} definujeme

Fa(x) =0 x∉A

=1 x∈A

Zobrazení je prosté:

Chceme A,B≤N, A≠B, potom fa≠fb

Pokud A≠B, potom existuje x∈N, které patří do právě jedné z množin A,B (x∈A #trojuhelnicek B)

Potom fa(x)≠fb(x) tedy fa ≠ fb

Zobrazení je na

TJ. Pokud máme f:N->{0,1}, pak f=fa pro nějakou A≤N zvolíme A:={x∈N:f(x)=1}, potom f=fa

TVRZENÍ: o počtu sudých a lichých podmnožin

Nechť N je konečná množina velikosti n.

Potom N má přesně 2n-1 sudých podmnožin a 2n-1 lichých podmnožin

DŮKAZ:

Stačí ukázat, že je stejný počet sudých a lichých podmnožin, protože víme, že dohromady jich je 2n

Zavedeme zobrazení Ψ:2N->2N

Jako Ψ(A):=A #trojuhelnicek {a}, když *a* je přesně zvolený prvek N

Ψ převádí sudé podmnožiny na liché a naopak

Ψ(Ψ(A))=A pro libovolnou A ≤ N

Chceme, že Ψ je bijekcemezi sudými a lichými podmnožinami

Varianta ověření 1: podobně jako v předchozím důkazu

Varianta ověření 2: pomocí silnějšího tvrzení:

f:X->Y, g:Y->X takové, že g #kolecko f(x) = x #všechna x∈X a f #kolecko g(y) = y #všechna y∈Y

potom f|g jsou bijekce

TVRZENÍ: o počtu prostých zobrazení

Nechť M,N jsou konečné množiny |M|=:m, |N|=:n, potom počet prostých zobrazení

f:N->M je m\*(m-1)(m-2)...(m-(m-1))=

DŮKAZ:

N={ x1, x2,..., xn}

f(x1) ... můžeme vybrat m způsoby

Poté

f(x2)...můžeme vybrat m-1 způsoby

poté

f(x3)...

⋮

f(xn).... můžeme vybrat m-(m-1)způsoby

PERMUTACE

Definice:

Permutace na množině N je libovolná bijekce f:N->N

Počet permutací:

Bijekce A:N->M

Tedy počet permutací j

n\*(n-1)(n-2) ... \*1 => n!

Pokud |N|=|M| f je bijekce  prostá  na

Zápis permutací

Př: f:[4]->[4], f(1)=3, f(2)=1, f(3)=2, f(4)=4

... zjednodušení na [n] (3124)

Kombinační čísla

Definice:

Nechť k,n jsou celá, 0≤k≤n, potom definice kombinační číslo ==

Dále pro množinu N značíme množinu všech k \*prvků podmnožin N

TVRZENÍ: o počtu k-prvkových podmnožin

Nechť k,n jsou celá, 0≤k≤n a N je n-prvková množina. Potom počet k-prvkových podmnožin N je, tj. | |=

DŮKAZ: počítání dvěma způsoby

Spočteme, počet uspořádaných k-tic (x1,x2,....Xk), kde X1..., xk jsou různé prvky N

1.Způsob: n\*(n-1)(n-2)...(n-(n-1))

2.Způsob: prvně vybereme k-tici, { x1,x2,....Xk} ... | | možností

Pro každou možnost k! Jak uspořádat

Dohromady | |\*k!

Odtud n\*(n-1)(n-2)...(n-(n-1))= | |\*k!  = | |

VZTAHY:

=

Binomická věta:

(a+b)n = \*an-i \* bi

Náznak dk:

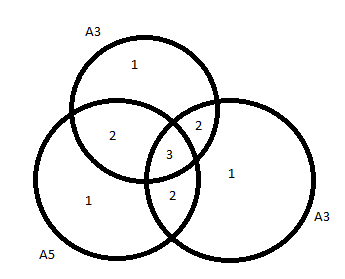
(a+b) (a+b)... (a+b)= an-i \* bi

Ci= protože chceme vybrat i pak *b* z *n* možných

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Motivační úloha:

Určete počet čísšel z množiny [10 000], která jsou dělitelná 2,3 nebo 5

ŘEŠENÍ:

Ai pro i∈ℕ čísla z [10 000] dělitelná *i*

|A2|=počet sudých čísel=5000

|A3|=9999/3=3333

|A5|=2000

|A2|+|A3|+|A5|=10333

| A2 ∩ A3| = |A6|=9996/6=1666

| A2 ∩ A5| = |A10|=10000/10=1000

| A3 ∩ A5| = |A15|=9990/15=666

|A2|+|A3|+|A5|-| A2 ∩ A5|-| A2 ∩ A3|-| A3 ∩ A5|=10333-3332=7001

27.10.

|A1 ∪ A2 ∪ A3| = |A1|+|A2|+|A3| - |A1 ∩ A2| - |A1 ∩ A3| - |A2 ∩ A3| + |A1∩ A2∩ A3|

|A1 ∪ A2 ∪ ... ∪ An| = |A1| + |A2| + ... |An| - (|A1∩ A2| + |A1∩ A3| + ... + |An-1∩ An| + ...

Zjednodušení:

|A1 ∪ A2 ∪ ... ∪ An| =

Věta (princip inkluze a ekluze)

Nechť A1, A2, ..., An jsou konečné množiny

Potom

|A1∪ A2∪ ... ∪ An| =

Důkaz

Uvážíme x ∈ A1∪ A2 ∪ ... ∪ An chceme, že x započítáme přesně jednpu na P.S. vzorečku

Řekněme, že x∈ Aj1, Aj2, ... Ajt ale nepatří do ostatních označme J = {j1, j2 ... , Jt} ≠ ∅

X ∈ <=> I ⊆ J

TJ. Na P.S. započítáme x:

potřebujeme ověřit že tento výraz je roven 1

=+

Aplikace: problém šatnářky

Úloha: *n* pánů navštíví divadlo, odevzdá klobouk šatnářce, šatnářka klobouky náhoně promíchá

Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane svůj klobouk

Pán *i* dostane klobouk π(i), kde π je nějaká permutace množiny [n]

Definice

Pevný bod permutace π na množině X je x∈X takové, že π(x)=x

Otázka

Jestli náhodná permutace nemá pevný bod

Definice šatnářčino číslo š(n)

Definujeme jako počet permutací bez pevného bodu na [n]

Výsledek úlohy

Výpočet

Nejprve počet permutací s pevným bodem

Ai := {permutace π na [n] i π (i) = i}

Cíl: |A1 ∪ A2 .... ∪ An| = =

n=4 i1=1, i2=3

určení

I={i1 ... ik}

= množina permutací, které mají i1, i2 ... in jako pevné body

š(n) = n!

**Základy pravděpodobnosti**

Zavedení pravděpodobnostního prostoru:

Příklady:

Ω množina všech situací, které mohou nastat

-Hod mincí Ω = {Panna,Orel}

-Hod šestistěnou kostkou = {1,2,3,4,5,6}

A1 = {5} ... padla 5

A2 = {2,4,6} ... padlo sudé číslo

Tři hody mincí

Ω = {ppp, ppo, pop, poo, opp, opo, oop, ooo} (konecné)

Kapka na ctvercovem stole

Ω [O,1]2

Jev = podmnožina Ω

Elementární jev = 1-prvková podmnožina Ω

Definice

Pravděpodobností prostor je trojice (Ω ∑ P) taková, že Ω je množina (tzv. Nosná množina),

∑ ⊆ 2Ω je množina přípustných jevů, P je funkce P:∑ → [0,1]

+ Ω, ∑, P splňují nějaké axiomy

Definice (diskrétní pravd. prostor)

Disk. Pravd. Prostor je trojice(Ω∑P) taková, že Ω konečná nebo spočetná množina (spočtena: existuje prostá funkce Ω→ℕ)

∑ = 2Ω , a P splňuje: I)P[a]=

II) P[Ω]=1

Pozn.

Pokud Ω je konečná hovoříme o konečném pravděpodobnostním prostoru

Pozn.

P[∅ ] = 0

A,B disjunktivní => P[A] + P[B] = P[A∪B]

Konkrétní příklad:

N hodů mincí Ω = {P,O}n pravděpodobnost každého elementárního jevu je

Uniformní (konečný) pravd. Prostor

Ω .... konečná

P[A]=

24.11.

Věta o počtu sledů

Nechť G=(V,E) je graf takový, že V={v1,v2,...,vn}.

Nechť AG je matice sousednosti grafu G,

nechť B=Ak je její odmocnina, potom bi,j se říká počet sledů z vi do vj délky k, kde B=(bi,j)

Definice

Mějme graf G=(V,E) a v ∈ V.

Potom stupněm *v* rozumíme počet hran, které z *v* vycházejí.

Stupeň začínáme *deg v = degG v*

LEMMA - Princip sudosti

Nechť G=(V,E) je graf. Potom ∑ deg v = 2 |E|.

Důsledek: počet vrcholů lichého stupně v nějakém grafu je sudý

Věta o skóre

Mějme posloupnost (d1,d2,...,dn) nezáporných celých čísel tak, že d1≤d2≤...≤dn

Uvážíme posloupnost D’=( d’1, d’2,... d’n)

d’1= ---di, pokud i<n-dn

‘--di-1, pokud i≥n-dn

Definice uzavřený eulerovský tah

v grafu G je tam takový, že každou hranu obsahuje právě jednou,

každý vrchol obsahuje alespoň jednou a začíná a končí ve stejném vrcholu.

Graf je eulerovský, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

Věta o eulerovských grafech

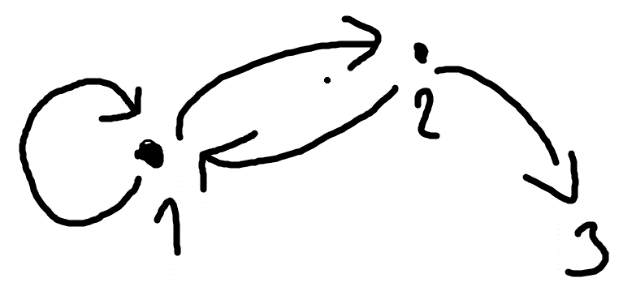
Graf je eulerovský, právě když je souvislý a všechny vrcholy mají sudý stupeň

1.12.

Orientovaný graf

Je dvojice G=(V,E) taková, že V je množina vrcholů a E≤ VxV (množina orientovaných hran)

Pro orientovanou hranu e=(x,y) řekněme, že *e* vychází z kruhu x a vchází do y (začíná v *x* a končí v *y*)



V={1,2,3}

E={(1,1), (1,2), (2,1), (2,3)}

Pro nás obvykle jsou orientované grafy konečné

Orientovaný tah

V orientovaném grafu G=(V,E)

Je posloupnost vrcholů a hran, kde li=(vi-1 vi) pro I ∈ [n]

A zároveň se hrany neopakují

Uzavřený Eulerovský tah

-začíná a končí ve stejném bode

-prochází všechny hrany právě jednou

-obsahuje všechny vrcholi

Věta o orientovaných eulerovských grafech

Nechť G=(V,E) je orientovaný graf potom G obsahuje uzavřený eulerovský tah,

Právě když deg+(n)≥deg-(n) pro každé n ∈ V a je slabě souvislí

Graf je strom, pokud neobsahuje kružnici a je souvislí

Vrchol stupně 1 v libovolném grafu se nazývá "list"

Graf o alespoň dvou vrcholech, které jsou propojeny má aspoň 2 listy

8.12.

Věta o ekvivalentních charakteristicích stromů

Nechť G=(V,E) je graf. Potom následující tvrení jsou ekvivalentní

I) G je strom

II) Jednoznačnost cest

III) Minimální souvislost - G je souvislý, ale po odebrání libovolné hrany přestane být souvislý

IV) maximalita bez kružnic - G je bez kružnice, ale pokud přidáme hrany mezi libovolné dva vrcholy

Dostaneme graf s kružnicí

V) G je souvislý a |V(G)| = |E(G)|+1

**Rovinné grafy**

-Nekříží se mu hrany

Definice

Oblouk

Je spojité zobrazení γ:[0,1]→ℝ2, které je prosté

Body γ (0) a γ(1) se nazývají koncové body oblouku

Definice (oprava)

**Oblouk** je obraz intervalu [0,1] při spojitém prostém zobrazení,

Tedy množina kruhu *y*:([0,1]), kde *y*:[0,1]-> ℝ2 spojitá prostá

Body *y* (0) a *y* (1) nazýváme koncovými obloouky bodu oblouku

Dále množina x ⊆ ℝ2 je obloukově souvislá , pokud ∀ x, y∈ X lze *x* a *y* spojit obloukem v X

(tj. x a y jsou koncové body)

Definice

Nechť G=(V,E) je graf potom nakreslím G rozumíme přiřazení které každému vrcholu v∈V přiřazuje bod *b(n)* ∈ ℝ2 a

každé hraně e∈E přiřazuje oblouk o(e) ⊆ ℝ2 za podmínek:

-b je prosté

-koncové body oblouku jsou body *b(v),b(w)*

-žádný nekoncový bod oblouků o(e) nesplývá s žádným z bodů b(v)

Definice (pokračování)

graf je rovinný pokud má nějaké rovinné nakreslení.

stěny v rovinném nakreslení jsou maximální obloukově souvislé podmnožiny ℝ2 \ ()

Věta - eulerův vzorec pro rovinné grafy

nechť G=(V,E) je souvislý rovinný graf a nechť a znaří počet stěn v libovolném rovinném nakreslení G potom

|V| - |E| + s = 2

Tvrzení o dopnění na triangulaci

kdykoliv G je rovinný graf s alespoň třemi vrcholy a zadanými rovinným nakreslením. Potom lze G rozšířit

pouze přidáváním hran na triangulaci

tj. rovinné nakresliní, kde každá stěna je ohraničena trojúhelníkem